

**CHARAKTERISIERUNGEN
RECHTSARTINSCHER RINGE**

Hans J. Müller

1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551922_0082

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK oHG
8 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2 8 0 9 0 9 0

CHARAKTERISIERUNGEN RECHTSARTINSCHER RINGE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Hans J. Müller
aus Augsburg

Der Fakultät zur Beurteilung eingereicht: 8. Oktober 1973



1. Berichterstatter: Prof. Dr. Friedrich Kasch

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Bodo Pareigis

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Februar 1974

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitende Übersicht	1
1. Eine Charakterisierung rechtsartinscher Ringe über die globale Dimension	5
2. Selbstduale Ringe vom endlichen Darstel- lungstyp	16
3. Konstruktion rechtsartinscher Ringe vom unendlichen Darstellungstyp	37
Literaturverzeichnis	44

EINLEITENDE ÜBERSICHT

Seit dem Erscheinen des Begriffs der homologischen Dimension ist eine umfangreiche Theorie über die verschiedensten modultheoretischen Dimensionen aufgebaut worden. Unser Interesse in dieser Arbeit richtet sich auf die "rechts-globale Dimension" eines Ringes R ($\text{r.gl.dim } R$), die als Supremum über die projektiven Dimensionen aller R -Rechtsmoduln definiert ist. Nach einem bekannten Satz genügt es zur Berechnung der rechts-globalen Dimension, nur das Supremum der projektiven Dimensionen aller zyklischen R -Rechtsmoduln zu kennen. Diese rechts-globale Dimension kann als ein "gewisses Maß" dafür aufgefaßt werden, inwieweit die R -Rechtsmoduln von der Eigenschaft, projektiv zu sein, höchstens abweichen können. Charakterisiert sind bisher nur die Ringe R mit $\text{r.gl.dim } R = 0$ (äquivalent mit R halbeinfach) und mit $\text{r.gl.dim } R = 1$ (äquivalent mit R rechtshereditär, aber nicht halbeinfach).

In dieser Arbeit behandle ich vornehmlich artinsche Ringe. Solche Ringe können bekanntlich auch unendliche globale Dimension besitzen. Im ersten Teil der vorliegenden Schrift ist es mein Ziel zu zeigen, daß ein rechtsartinscher Ring immer ringisomorph zu einem Unterring eines rechtsartinschen Ringes endlicher globaler Dimension ist. Dabei gilt es, folgenden Satz zu beweisen:

Sei R ein rechtsartinscher Ring mit dem Jacobson-Radikal N , und sei n der Exponent von N , d.h. $N^n = 0$, aber $N^{n-1} \neq 0$. Dann hat der Ring

$$S = \text{End}_R \left(\bigoplus_{i=1}^n R/N^i \right)$$

folgende Eigenschaften:

- (a) S ist ein rechtsartinscher Ring.
- (b) Die Zentren von R und S sind isomorph.

(c) $\text{r.gl.dim } S \leq n+1$

(d) Ist $e \in S$ die Projektion von $\bigoplus_{i=1}^n R/N^i$ auf $R \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n R/N^i$
(e ist Idempotent in S), dann sind die Ringe eSe
und R isomorph.

M. Auslander hat einen Teil dieses Theorems in [1] für artinsche Algebren gezeigt. (Eine artinsche Algebra A ist ein artinscher Ring, der als Modul über seinem Zentrum Z endlich erzeugt ist.) In der vorliegenden Arbeit wird diese Endlichkeitsbedingung für A fallengelassen und ein möglichst elementarer Beweis für Teil (c) und (d) angegeben; außerdem wurde (a) und (b) hinzugefügt.

Aus diesem Satz folgert man leicht, daß die rechtsartinschen Ringe endlicher globaler Dimension schon alle rechtsartinschen Ringe bestimmen. Eine plausible Erklärung für diese erstaunliche Tatsache ist wohl die, daß die Anzahlen der Blöcke von R und S übereinstimmen, S aber "erheblich mehr" direkt unzerlegbare, nicht-isomorphe, projektive Rechtsideale besitzt als R ; gibt es in einem Block von R m nicht-isomorphe, direkt unzerlegbare, projektive Rechtsideale, so existieren in dem entsprechenden Block von S $n \cdot m$ nicht-isomorphe, direkt unzerlegbare, projektive Rechtsideale.

Im zweiten Paragraphen beschäftigen wir uns mit selbstdualen artinschen Ringen, d.h. mit artinschen Ringen, die morita-dual zu sich selbst sind. Das ist der Fall, wenn es einen R - R -Bimodul ${}_R U_R$ gibt, so daß U_R und ${}_R U$ jeweils endlich erzeugte, injektive Kogeneratoren sind mit $\text{End}_R({}_R U_R) = R$. Artinsche Algebren und Quasi-Frobenius-Ringe sind Beispiele für selbstduale artinsche Ringe. Im folgenden heißt ein Ring R vom endlichen Darstellungstyp, wenn er rechtsartinsch ist und nur endlich viele nicht-isomorphe, unzerlegbare, endlich erzeugte R -Rechtsmoduln existieren. Wir wollen hier eine bijektive Zuordnung zwischen den Morita-Äquivalenzklassen $[R]$ von selbstdualen Ringen R vom endlichen Darstellungstyp mit selbstdualem Endomorphismenring $\text{End}_R({}_R G_R)$ und den Morita-Äquivalenzklassen $[S]$ von selbstdualen artinschen Ringen S

mit $\text{gl.dim } S \leq 2$, $\text{dom.dim } S \geq 2$ und selbstdualem Endomorphismenring $\text{End}_S(Q_S)$ herleiten, wobei G_R die direkte Summe aller nicht-isomorphen, unzerlegbaren, endlich erzeugten R -Rechtsmoduln und Q_S den minimal-treuen S -Rechtsmodul darstellen. Ein Ring S hat dabei die dominante Dimension (dom.dim) größer oder gleich 2 genau dann, wenn für eine minimale injektive Auflösung von S $0 \longrightarrow S \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots$ gilt: I_1, I_2 S -projektiv. Bei der Zuordnung der Äquivalenzklassen korrespondiert ein Ring R vom endlichen Darstellungstyp mit dem Endomorphismenring $S = \text{End}_R(G_R)$ und ein Ring $S \in [S]$ mit dem Endomorphismenring $R = \text{End}_S(Q_S)$ der direkten Summe aller nicht-isomorphen, unzerlegbaren, projektiv und zugleich injektiven S -Rechtsmoduln, also des minimal-treuen Moduls Q_S . Für artinsche Algebren hat Auslander dieses Resultat in [1] im wesentlichen über Funktorkategorien bewiesen. In dieser Arbeit werden wir vor allem den dort schwierigen ersten Teil direkt beweisen: Für einen Modul P_R über einem Ring R sei $\underline{P}$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{M}_R$, die aus allen Objekten besteht, die zu direkten Summanden von beliebigen direkten Summen von P isomorph sind. Ist P_R projektiv, so sei $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{M}_R$ mit allen Objekten, die $\underline{P}$ -Präsentierungen besitzen. Dann wollen wir zeigen, daß $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ für beliebige Ringe Kerne und Kokerne besitzt. Die Kokerne von $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ sind die gleichen wie in $\mathcal{M}_R$; die Kerne, die von Auslander nicht angegeben wurden, haben folgende Gestalt: Ist $f: M_1 \longrightarrow M_2$ ein Morphismus in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$, dann ist

$$\left(\bigoplus_{g \in T} P \right) / \left(\sum_{g \in T} \text{Bi}(g) \right) \longrightarrow M_1$$

mit $T = \text{Hom}_R(P, \text{Ke}(f))$ der Kern von f in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$. Anschließend sehen wir, daß $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ bereits abelsch ist. Für einen endlich erzeugten projektiven Modul P ist $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ sogar eine Grothendieckkategorie und damit äquivalent zur Modulkategorie über dem Endomorphismenring von P . Dann werden einige Sätze, die Auslander für artinsche Algebren gezeigt hat, allgemeiner für selbstduale Ringe bewiesen.

Kürzlich erschien eine längere Arbeit von Tachikawa und Ringel über QF -3 Ringe, in der eine ähnliche bijektive Zuord-

nung für artinsche Ringe vom endlichen Darstellungstyp angegeben wird. Allerdings ist dann der korrespondierende Endomorphismenring S nicht mehr artinsch, sondern lediglich semi-primär.

Im letzten Teil meiner Arbeit gebe ich ein Verfahren an, wie man aus einem beliebigen rechtsartinschen Ring unmittelbar einen rechtsartinschen Ring herleitet, der nicht mehr vom endlichen Darstellungstyp ist. Sei nämlich R ein rechtsartinischer Ring und $T_2(R)$ der Ring der unteren 2×2 Dreiecksmatrizen über R , dann besitzt der Unterring $T_2(T_2(T_2(R)))$ der unteren 8×8 Dreiecksmatrizen über R unendlich viele nicht-isomorphe unzerlegbare, endlich erzeugte R -Rechtsmoduln. Die Anregung zu dieser Konstruktion geht auf eine Frage von Auslander in [1] zurück, ob für artinsche Algebren vom endlichen Darstellungstyp die wiederholte Anwendung von $T_2(-)$ einmal zu einem Ring führt, der nicht mehr vom endlichen Typ ist. Mein Beweis für dieses Verfahren ist so aufgebaut, daß das allgemeine Ergebnis nur für die zugehörigen Basisringe und schließlich nur für einen beliebigen Schiefkörper gezeigt werden muß.

§ 1 EINE CHARAKTERISIERUNG RECHTSARTINSCHER RINGE

ÜBER DIE GLOBALE DIMENSION

Wir wollen in diesem Abschnitt das Ergebnis herleiten, daß die rechtsartinschen Ringe endlicher globaler Dimension bereits alle rechtsartinschen Ringe bestimmen, d.h. genauer, sie als Unterringe enthalten.

Zuvor aber einige Bezeichnungsweisen, die durchwegs in dieser Arbeit verwendet werden: Seien im folgenden

R ein assoziativer Ring mit Einselement 1 ,

$\mathcal{M}_R$ die Kategorie der unitären R -Rechtsmoduln und

$\mathcal{W}_R$ die Kategorie der unitären, endlich erzeugten R -Rechtsmoduln.

Modulhomomorphismen werden immer den Skalaren entgegengesetzt geschrieben. Für Rechtsmoduln ist das üblich; ist jedoch $f: {}_R M \longrightarrow {}_R M'$ ein Homomorphismus von R -Linksmoduln, so schreiben wir $(m)f$ statt $f(m)$ und $(rm)f = r((m)f)$ statt $f(rm) = r(f(m))$. Eine Anzahl von dualen Ringen kann dadurch vermieden werden.

Ist $G \in \mathcal{M}_R$ (bzw. $G \in \mathcal{W}_R$), so sei

$\underline{G}$ (bzw. $\underline{G}$) die volle Unterkategorie von $\mathcal{M}_R$ (bzw. $\mathcal{W}_R$), die aus allen Objekten besteht, die zu direkten Summanden von beliebigen (bzw. endlichen) direkten Summen von G isomorph sind.

G ist offensichtlich Generator für $\underline{G}$ (bzw. für $\underline{G}$). Sei nun $S := \text{End}_R(G_R)$, dann ist G mit der Definition

$$s \cdot m := s(m) \quad \text{für } s \in S \text{ und } m \in G$$

ein S -Linksmodul. Ist $M \in \mathcal{M}_R$, so ist $\text{Hom}_R({}_S G_R, M_R)$ ein S -Rechtsmodul durch die Definition

$$(fs)(m) := f(sm) \quad \text{für } m \in G, s \in S \text{ und } f \in \text{Hom}_R(G, M).$$

Gleich zu Beginn werde ich das folgende einfache Lemma beweisen, da es in den beiden ersten Paragraphen recht häufig angewendet wird.

LEMMA 1.1: Ist $G \in \mathcal{M}_R$ und $S := \text{End}_R(G_R)$, dann gilt:

- (a) $\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i \in I} G)$ ist S-isomorph zu
 $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(G, G)$ für jede Indexmenge I.
- (b) Für alle $M_R \in \underline{G}$ ist $\text{Hom}_R(G, M)_S$ S-projektiv.

Beweis:

(a) Da G endlich erzeugt ist, ist

$$\phi : \text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i \in I} G) \ni f \longmapsto \langle \pi_i f \rangle \in \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(G, G)$$

wohldefiniert, wobei π_i die i -te Projektion von $\bigoplus_{i \in I} G$ auf G ist. Man verifiziert, daß ϕ ein Isomorphismus von abelschen Gruppen ist. Da weiterhin für $s \in S$ gilt

$$\phi(fs) = \langle \pi_i fs \rangle = \langle \pi_i f \rangle s = (\phi f)s,$$

ist ϕ ein S -Isomorphismus.

(b) Sei $M \in \underline{G}$, so existiert G' und G'' in $\underline{G}$ mit $M \cong G'$ und $G' \oplus G'' = \bigoplus_{i \in I} G$ für eine gewisse Menge I . Analog zu (a)

zeigt man die S -Isomorphie

$$\bigoplus_{i \in I} S \cong \text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i \in I} G) \cong \text{Hom}_R(G, G') \oplus \text{Hom}_R(G, G').$$

Da $\text{Hom}_R(G, G') \cong \text{Hom}_R(G, M)$ und der Ring S projektiv ist, haben wir die S -Projektivität von $\text{Hom}_R(G, M)$ gezeigt.

Sei ab jetzt R ein rechtsartinscher Ring mit dem Radikal N und dem Exponenten n von N . Wir wollen nun zeigen, daß für den endlich erzeugten R -Rechtsmodul $\bigoplus_{i=1}^n R/N^i$ der zugehörige Endomorphismenring wieder rechtsartinsch ist.

SATZ 1.2 : Sei R ein rechtsartinscher Ring mit 1 und

$$G := \bigoplus_{i=1}^n R/N^i, \text{ dann gilt:}$$

- (a) $S := \text{End}_R({}_R G_R)_R$ ist endlich erzeugt über R .
- (b) S ist ein rechtsartinscher Ring.
- (c) Das Zentrum $Z(R)$ von R ist isomorph zum Zentrum $Z(S)$ von S .

Beweis:

(a) $S_R = \text{Hom}_R({}_R G_R, G_R)_R$ ist ein R -Rechtsmodul. Der kanonische R - R -Epimorphismus

$$\pi: \bigoplus_{i=1}^n R^R_R \longrightarrow {}_R G_R$$

induziert einen R -Monomorphismus

$$\begin{aligned} S_R = \text{Hom}_R({}_R G_R, G_R)_R &\xrightarrow{\text{Hom}(\pi, G)} \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i=1}^n R^R_R, G_R\right)_R \cong \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_R(R^R_R, G_R)_R. \end{aligned}$$

Da $\text{Hom}_R(R, G)_R \cong G_R$ und G_R endlich erzeugt ist, muß S_R isomorph zu einem endlich erzeugten Untermodul von $\bigoplus_{i=1}^n G_R$ sein.

(b) S_R ist wegen (a) rechtsartinsch, da R rechtsartinsch. Da außerdem jeder S -Rechtsmodul auch R -Rechtsmodul ist, ist S_S artinsch.

(c) Sei $I := (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{1}) \in \bigoplus_{i=1}^n R/N^i = G$ und g_k die k -te Komponente von $g \in G$, dann ist

$$\psi: Z(S) \ni \alpha \longmapsto [\alpha(I)]_n \in Z(R)$$

der gesuchte Ringisomorphismus. Anhand der "Testhomomorphismen"

$$e_i: G \ni \langle \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n \rangle \longmapsto \langle 0, \dots, 0, \bar{r}_i, 0, \dots, 0 \rangle \in G,$$

$$e'_j: G \ni \langle \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n \rangle \longmapsto \langle 0, \dots, 0, \bar{r}_n^{(j)}, 0, \dots, 0 \rangle \in G$$

mit $\bar{r}_n^{(j)} := r_n + N^j$ kann man leicht nachprüfen, daß jedes

$\alpha \in Z(S)$ bereits durch das Bild von I eindeutig bestimmt ist mit

$$[\alpha(\langle \bar{1}, \dots, \bar{1} \rangle)]_j = [\overline{\alpha(I)}]_n^{(j)} \in R/N^j$$

und $[\alpha(I)]_n$ ein Zentrumselement von R ist. Umgekehrt erhält man natürlich für jedes $z \in Z(R)$ ein $\alpha_z \in Z(S)$ durch die Definition

$$\alpha_z(\langle \bar{1}, \dots, \bar{1} \rangle) := \langle \bar{z}^{(1)}, \dots, \bar{z}^{(n)} \rangle.$$

Die Anzahl der Blöcke von R und S stimmt folglich überein. Aber S besitzt n -mal so viele direkt unzerlegbare, nicht-isomorphe, projektive Rechtsideale wie R .

Ehe wir nun zeigen, daß jeder rechtsartinsche Ring R ringisomorph zu einem Unterring eines rechtsartinschen Ringes S endlicher globaler Dimension ist, werden wir noch das folgende wichtige Lemma beweisen, das in ähnlicher Form in [1] bei Auslander zu finden ist.

LEMMA 1.3: Sei R ein rechtsartinscher Ring mit dem Radikal N ,

und sei n der Exponent von N . Ist weiterhin

$$G := \bigoplus_{i=1}^n R/N^i, \text{ dann gilt für } C \in \mathcal{M}_R \text{ mit}$$

$$C \cdot N^m = 0 \text{ und } m \leq n:$$

Es existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_m \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

von R -Rechtsmoduln $M_i \in G$, so daß die Folge

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_m) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C) \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $A \in G$.

Beweis durch Induktion nach n :

Ist $n = 1$, so erhält man aus $\text{Ra}(R) = N = 0$ und R_R artinsch die Halbeinfachheit von R . Daher ist jedes $C \in \mathcal{M}_R = \underline{R} = \underline{G}$ projektiv. Mit $M_1 = C$ gilt die Behauptung.

Sei nun $n+1$ der Exponent von R , und sei $\bar{R}_1 := R/N^1$ für

$i = 1, \dots, n+1$. Wir gliedern den Induktionsschritt von n auf $n+1$ in drei Teile:

1) Sei $C \in \mathcal{M}_{\bar{R}_n}$ mit $C \cdot N^n = 0$ und $m \leq n$, so ist $C \in \mathcal{M}_{\bar{R}_n}$

mit der Definition $c \cdot \bar{r} := c \cdot r$. Wegen $\text{Ra}(\bar{R}_n) = N/N^n$ hat $\bar{R}_n$ den Exponent n . Nach Induktionsannahme existiert also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_m \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

von $\bar{R}_n$ -Moduln, wobei die M_i aus der additiven Unterkategorie $\underline{G}'$ sind, die durch

$$G' := \bigoplus_{i=1}^n R/N^i \cong \bigoplus_{i=1}^n \bar{R}_n / \text{Ra}(\bar{R}_n)^i$$

erzeugt wird, so daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\bar{R}_n}(A, M_m) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_{\bar{R}_n}(A, M_1) \longrightarrow \text{Hom}_{\bar{R}_n}(A, C) \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $A \in \underline{G}'$. Die $\bar{R}_n$ -Moduln (bzw. $\bar{R}_n$ -Homomorphismen) kann man auch als R -Moduln (bzw. R -Homomorphismen) betrachten. Da G' ein direkter Summand von

$$G = \bigoplus_{i=1}^{n+1} R/N^i$$

ist, gilt $\underline{G}' \subset \underline{G}$ und $\underline{G}' \subset \underline{G}$, also $M_i \in \underline{G}_R$. R/N^i ist für $i = 1, \dots, n+1$ ein R -Rechtsmodul endlicher Länge; damit sind die einzigen unzerlegbaren R -Rechtsmoduln in $\underline{G}$, die nicht in $\underline{G}'$ sind, isomorph zu direkten Summanden von R . Also ist nach dem Satz von Krull - Remak - Schmidt jedes $A \in \underline{G} \setminus \underline{G}'$ direkt zerlegbar in zwei Moduln $A' \in \underline{G}'$ und $A'' \in \underline{R}$. Für beide Moduln existiert nun eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A', M_m) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(A', M_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A', C) \longrightarrow 0$$

mit A' für A' bzw. A'' . Folglich ist für die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_m \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \text{mit } M_i \in \underline{G}$$

die Behauptung erfüllt, daß

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_m) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C) \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $A \in \underline{G}$.

2) Sei jetzt $C \in \mathcal{M}_R$ mit $C \cdot N^n \neq 0$ und sei

$$C' := \{c \in C \mid cN^n = 0\}, \text{ also } C'N^n = 0.$$

Dann existiert nach 1) ein Epimorphismus $f': M'_1 \rightarrow C'$ mit $M'_1 \in \underline{G}'$, so daß

$$\text{Hom}_R(A, M'_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C') \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $A \in \underline{G}'$. Wegen $A \cdot N^n = 0$ für alle $A \in \underline{G}'$ hat die Komposition

$$f: M'_1 \xrightarrow{f'} C' \xrightarrow{\iota} C$$

die Eigenschaft, daß die Sequenz

$$\text{Hom}_R(A, M'_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C) \longrightarrow 0$$

für $A \in \underline{G}'$ exakt ist, da $\text{Hom}(A, f')$ und $\text{Hom}(A, \iota)$ Epimorphismen sind.

R ist rechtsartinsch, also perfekt, und somit besitzen alle R -Rechtsmoduln projektive Hüllen. Sei nun der Epimorphismus $h: P \rightarrow C/C'$ eine projektive Hülle von C/C' . Wegen der

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & & & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & & & \\
 M'_1 & \xrightarrow{f'} & C' & \xleftarrow{\iota} & C & \xrightarrow{\nu} & C/C' \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \iota_{M'_1} & \searrow f & \uparrow & & \uparrow g & \nearrow h & \\
 P \oplus M'_1 & \xrightarrow{\tau_P} & P & & & &
 \end{array}$$

$t = g \circ f$

Exaktheit von $C \rightarrow C/C' \rightarrow 0$ gibt es ein $g \in \text{Hom}_R(P, C)$ mit $h = \nu g$. Betrachte nun den Homomorphismus

$$t: P \oplus M'_1 \ni \langle p, m' \rangle \longmapsto g(p) + f(m') \in C.$$

Da f' und h Epimorphismen sind, so auch t ; denn sei $c \in C$, so existiert zu $c + C'$ ein $p \in P$ mit $g(p) = c_1$ und $c_1 + C' = c + C'$; außerdem gibt es ein $m' \in M'_1$ mit $f'(m') = c - c_1$, so daß sich $t(\langle p, m' \rangle) = c$ ergibt.

Da $\text{Hom}_R(A, M_1') \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C) \longrightarrow 0$ exakt ist für alle $A \in \underline{G}'$, ist auch die Folge

$$\text{Hom}_R(A, P \oplus M_1') \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C) \longrightarrow 0$$

exakt für alle $A \in \underline{G}$, da alle unzerlegbaren R -Rechtsmoduln in $\underline{G} \setminus \underline{G}'$ projektiv sind. Wegen $P \in \underline{R}$ und $M_1' \in \underline{G}'$ ist $M_1 := P \oplus M_1' \in \underline{G}$.

3) Wir können noch einmal Schritt 1) ins Spiel bringen, wenn wir $\text{Ke}(t) \cdot N^n = 0$ zeigen:

$$\begin{aligned} \langle p, m' \rangle \in \text{Ke}(t) &\iff g(p) = -f'(m') \in C' \\ &\implies p \in g^{-1}(C') \hookrightarrow \text{Ke}(h) \hookrightarrow \text{Ra}(P) = P \cdot N, \end{aligned}$$

also $p \cdot N^n = 0$. Weiter ist $m' \cdot N^n = 0$, da $M_1' \in \underline{G}'$, folglich ist $\text{Ke}(t) \cdot N^n = 0$. Nach 1) existiert also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2 \longrightarrow \text{Ke}(t) \longrightarrow 0$$

von R -Rechtsmoduln mit $M_i \in \underline{G}$, so daß

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_{n+1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_2) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, \text{Ke}(t)) \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $A \in \underline{G}$. Daraus ergibt sich schließlich die Behauptung des Lemmas: Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{t} C \longrightarrow 0$$

hat die Eigenschaft, daß die $M_i \in \underline{G}$ sind und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_{n+1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C) \longrightarrow 0$$

exakt ist für alle $A \in \underline{G}$.

Bemerkungen:

a) Vorstehendes Lemma wurde mit elementaren Mitteln bewiesen. Unter Zuhilfenahme des Theorems 1 aus [16] im ersten und zweiten Teil des Induktionsschrittes läßt sich Lemma 1.3 noch verallgemeinern: Die Exaktheit von (1) gilt sogar für alle $A \in \underline{G}$. Dies wird aber im folgenden nicht benötigt.

b) Um auch den Hauptsatz 1.4 mit möglichst elementaren Mitteln zu zeigen, verzichte ich auf Anwendung des Satzes von

Gabriel-Popescu; dieses Theorem würde den Beweis an einer Stelle in Teil (c) nur unwesentlich verkürzen.

HAUPTSATZ 1.4: Sei R ein rechtsartinscher Ring mit dem Radikal N und dem Exponenten n von N . Dann hat der Ring $S := \text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^n R/N^i\right)$ folgende Eigenschaften:

- (a) S ist ein rechtsartinscher Ring.
- (b) Die Zentren von R und S sind isomorph.
- (c) $\text{r.gl.dim } S \leq n+1$
- (d) Sei $e \in S$ die Projektion von $G = \bigoplus_{i=1}^n R/N^i$ auf $R \hookrightarrow G$, dann sind die Ringe eSe und R isomorph.

Beweis:

(a) und (b) siehe Satz 1.2 (b) und (c).

(c) Nach dem bekannten Satz von Auslander, daß die $\text{r.gl.dim } R$ eines Ringes R gleich dem Supremum der projektiven Dimensionen aller zyklischen R -Rechtsmoduln ist, genügt es im folgenden eine S -projektive Auflösung zu einem beliebigen zyklischen $M \in \mathcal{M}_S$ zu konstruieren mit maximaler Länge $n+1$. Auf natürliche Weise ergibt sich die exakte Folge

$$\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i=1}^m G) \xrightarrow{f_1} \text{Hom}_R(G, G) \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

aus der nachstehenden Folge von S -Homomorphismen (siehe Lemma 1.1 (a)):

$$\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i=1}^m G) \xrightarrow{\sim \Phi} \bigoplus_{i=1}^m S \xrightarrow{f_1'} \text{Ke}(f_0) \xrightarrow{\iota} \text{Hom}_R(G, G) = S \xrightarrow{f_0'} M \longrightarrow 0$$

für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$. Sei $\{k_1, \dots, k_m\}$ ein S -Erzeugendensystem von $\text{Ke}(f_0)$ und π_j die j -te Projektion von

$\bigoplus_{i=1}^m G_i$ mit $G_i = G$ auf G_j , so ist

$$t := \sum_{i=1}^m k_i \pi_i : \bigoplus_{i=1}^m G \longrightarrow G$$

ein R -Homomorphismus mit $\text{Hom}(G, t) = f_1 = \iota f'_1 \phi$.

Wegen $N^n = 0$ haben wir $\text{Ke}(t) \cdot N^n = 0$. Nach dem vorhergehenden Lemma existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2 \longrightarrow \text{Ke}(t) \longrightarrow 0$$

von R -Rechtsmoduln mit $M_i \in \underline{G}$, so daß die Folge von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_{n+1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(A, M_2) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, \text{Ke}(t)) \longrightarrow 0$$

exakt ist für $A \in \underline{G}$. Da für $h \in \text{Hom}_R(M_i, M_{i-1})$ $\text{Hom}(G, h)$ ein S -Homomorphismus ist, erhält man nach Lemma 1.1 (b) endlich eine S -exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}_R(G, M_{n+1})_S \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(G, M_2)_S \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i=1}^m G)_S \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

von S -projektiven Rechtsmoduln. Folglich ist $\text{pd}(M) \leq n+1$, was unsere Behauptung $\text{r.gl.dim } S \leq n+1$ impliziert.

(d) Ist e die Projektion von $\bigoplus_{i=1}^n R/N^i$ auf $R/N^n \cong R$, so ist offenbar

$$eSe \cong \text{Hom}_R(R, R) \cong R.$$

Damit haben wir den Hauptsatz 1.4 vollständig bewiesen.

Durchläuft also S alle rechtsartinschen Ringe endlicher globaler Dimension, so durchlaufen die rechtsartinschen Ringe eSe alle rechtsartinschen Ringe. In diesem Sinne bestimmen die rechtsartinschen Ringe endlicher globaler Dimension alle rechtsartinschen Ringe:

Jeder rechtsartinsche Ring ist ringisomorph zu einem Unter-ring eines rechtsartinschen Ringes endlicher globaler Dimension.

Zum Schluß des ersten Abschnitts noch ein Beispiel, das die Struktur des Ringes S für einen speziellen Ring R verdeutlichen soll. Ich verdanke es Herrn W. Müller.

Sei K ein Körper, $I := x^n \cdot K[x]$ das von x^n erzeugte Ideal im Polynomring $K[x]$, dann ist bekanntlich $R := K[x]/I$ eine einreihige Algebra mit dem Radikal $N = (x+I)R$, dem Exponenten n , und R hat unendliche globale Dimension für $n \geq 2$. Wir schreiben $\bar{x} := x+I$. Eine K -Basis von

$S := \text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^n R/N^i\right)$ ist die Menge

$$\left\{ s_{ja_i} \mid i, j = 1, \dots, n; s = 0, \dots, n-1 \text{ und } j-i \leq s < j \right\},$$

wobei $s_{ja_i}(1 + N^i) = \bar{x}^s + N^j$ und

$$s_{ja_i}(1 + N^k) = 0 \quad \text{für } k \neq i \text{ ist.}$$

Falls man $s_{ja_i} = 0$ setzt für $s \geq j$ oder $s < j-i$, gilt für die Multiplikation:

$$t_{l a_k} \cdot s_{ja_i} = \begin{cases} t_{l a_k}^{s+j} & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

S hat die Idempotenten o_{ia_i} für $i = 1, \dots, n$; das Radikal von S wird von den Elementen ${}^1_{i+1}a_i, o_{ia_{i+1}}$ für $i = 1, \dots, n-1$ erzeugt.

$$\text{Ra}(o_{ia_i} S) = o_{ia_{i+1}} S + {}^1_{i+1}a_{i-1} S \quad \text{für } i = 2, \dots, n-1$$

und $(\text{Ra}(S))^{2n-1} = 0$, $(\text{Ra}(S))^{2n-2} \neq 0$.

Dieses Beispiel und auch andere lassen vermuten, daß der Exponent von $\text{Ra}(S)$ immer kleiner als $2n$ ist. Er ist aber immer größer oder gleich dem Exponenten von $\text{Ra}(R)$ für einen beliebigen rechtsartinschen Ring R .

Der Linkssockel von S hat die Basis $\left\{ {}^{n-1}_n a_i \mid i = 1, \dots, n \right\}$,

der Rechtssockel von S hat die Basis $\left\{ {}^{i-1}_i a_n \mid i = 1, \dots, n \right\}$,
 d.h. jedes unzerlegbare projektive Rechts- (bzw. Links-)
 Ideal hat einen eindeutigen minimalen Untermodul und für je
 zwei solche Rechts- (bzw. Links-) Ideale sind diese iso-
 morph. Damit kann man die Eigenschaft leicht zeigen, die
 wohl ausschlaggebend für die Tatsache ist, daß S von endli-
 cher globaler Dimension ist, nämlich:

$${}^0_i a_i S \cong {}^1_{i+1} a_i S \subseteq \text{Ra} ({}^0_{i+1} a_{i+1} S).$$

Für $n = 2$ ist S eine einreihige Algebra, und man prüft
 ohne Schwierigkeiten direkt nach, daß die globale Dimension
 von S gleich 2 ist. Unser Satz liefert nur $\text{gl.dim } S \leq 3$.
 Ob im allgemeinen die Aussage (c) des Hauptsatzes verschärft
 werden kann, ist ein interessantes ungelöstes Problem.

§ 2 SELBSTDUALE RINGE

VOM ENDLICHEN DARSTELLUNGSTYP

Ehe wir uns mit selbstdualen Ringen befassen und in der Folge selbstduale Ringe vom endlichen Darstellungstyp charakterisieren, nehmen wir zur Vorbereitung einen von diesen Begriffen unabhängigen Teil vorweg, der erst am Schluß dieses Abschnitts entscheidend, wenn auch in spezieller Form, eingeht.

Seien im folgenden $\mathcal{L}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{P}$ eine volle additive Unterkategorie von $\mathcal{L}$, die aus projektiven Objekten in $\mathcal{L}$ besteht.

Definition:

- a) Eine $\mathcal{P}$ -Präsentierung eines Objektes $C \in \mathcal{L}$ ist eine exakte Sequenz $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ mit $P_1 \in \mathcal{P}$.
- b) Die volle Unterkategorie von $\mathcal{L}$, bestehend aus den Objekten, die $\mathcal{P}$ -Präsentierungen haben, bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Zunächst wollen wir zeigen, daß $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ eine Kategorie mit Kokernen ist. Geben wir aber einen beliebigen Ring R und einen beliebigen projektiven Modul $P \in \mathcal{M}_R$ vor, so besitzt die volle Unterkategorie $\underline{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_R)$ von $\mathcal{M}_R$ auch Kerne, ja sie ist sogar eine abelsche Kategorie. Ist P noch endlich erzeugt, so ist P Progenerator für $\underline{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_R)$; da in $\underline{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_R)$ beliebige Koprodukte existieren, ist $\underline{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_R)$ schließlich eine Grothendieck-Kategorie und äquivalent zur Modulkategorie über dem Endomorphismenring von P .

LEMMA 2.1: Sei $\mathcal{P}$ eine volle additive Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{L}$, deren Objekte projektiv in $\mathcal{L}$ sind, so gilt:

Alle Morphismen in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ haben Kokerne in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Beweis (nach Auslander):

Wir zeigen sogar etwas mehr: Sei $C \xrightarrow{f_{-1}} C' \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ exakt in $\mathcal{L}$ mit $C, C' \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, so ist $C'' \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Seien $f_{-1}: C \longrightarrow C'$ ein Morphismus in $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ und

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

die $\mathcal{P}$ -Präsentierungen von C und C' . Da die P_i, P'_i projektiv sind, kann der Morphismus f_{-1} zu einem Komplexmorphismus $f: P \longrightarrow P'$ geliftet werden, wobei $P^{(i)}$ der Komplex

$$0 \longrightarrow P_1^{(i)} \xrightarrow{d_1^{(i)}} P_0^{(i)} \xrightarrow{d_0^{(i)}} 0$$

ist. Sei $M(f)$ der Abbildungskegel von f ("mapping cone of f " , siehe [9; S. 46/47]), also

$$M(f)_i : = P_{i-1} \oplus P'_i \quad \text{und}$$

$$\partial_i : = (-d_{i-1}, d'_i + f_{i-1}) : M(f)_i \longrightarrow M(f)_{i-1}.$$

Nach MacLane erhalten wir den exakten Komplex

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\iota} & P_1 \oplus 0 & \xrightarrow{\tau_1} & P_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow d_1 \\ 0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{\iota} & P_0 \oplus P'_1 & \xrightarrow{\tau_2} & P_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow d_0 \\ 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{\iota} & 0 \oplus P'_0 & \xrightarrow{\tau_3} & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Daraus ergibt sich die lange exakte Homologiefolge

$$\begin{aligned} H_1(P) &\longrightarrow H_1(P') \longrightarrow H_1(M(f)) \longrightarrow H_0(P) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_0(P') \longrightarrow H_0(M(f)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Dabei ist $H_0(P) \cong \text{Kok}(d_1) \cong C$ und $H_0(P') \cong C'$ und der durch f_{-1} induzierte Morphismus $H_0(P) \longrightarrow H_0(P')$ kann als identisch mit f_{-1} angesehen werden. Daher ist $H_0(M(f)) \cong \text{Kok}(f_{-1})$. Da die Sequenz

$$P_0 \oplus P'_1 \xrightarrow{a_1} P'_0 \longrightarrow H_0(M(f)) \longrightarrow 0$$

exakt ist und die Objekte $P_0 \oplus P'_1$ und P'_0 in $\mathcal{P}$ sind, haben wir schließlich das gewünschte Resultat:

$$H_0(M(f)) \cong \text{Kok}(f_{-1}) \cong C'' \in \mathcal{P}(\mathcal{L}).$$

LEMMA 2.2: Sei jetzt R ein beliebiger Ring, P ein projektiver Modul aus $\mathcal{M}_R$, $\underline{P}$ wie eingangs und $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ wie oben definiert, dann ist $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ eine Kategorie mit Kernen und Kokernen.

Beweis:

Wegen des eben bewiesenen Lemmas haben wir nur zu zeigen, daß $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ eine Kategorie mit Kernen ist. Wir weisen dabei nicht nur die Existenz von Kernen nach, sondern geben sie sogar für jeden beliebigen Homomorphismus in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ explizit an: Sei $f: M \longrightarrow M'$ ein Homomorphismus in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$. Sei $K = \text{Ke}(f)$ der Kern von f in $\mathcal{M}_R$ und

$$\text{Ke}_P(f) := \sum_{g \in \text{Hom}(P, K)} \text{Bi}(g) \hookrightarrow K.$$

Wähle nun $P^* := \bigoplus_{g \in \text{Hom}(P, K)} P$ und

$\mu_f := \bigoplus g: P^* \longrightarrow \text{Ke}_P(f)$, dann existiert wegen $\text{Ke}_P(\mu_f) \hookrightarrow \text{Ke}(\mu_f)$ ein eindeutiger Homomorphismus

$$h': P^*/\text{Ke}_P(\mu_f) \longrightarrow \text{Ke}_P(f),$$

so daß das nachstehende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc}
 P^* & \xrightarrow{\mu_f} & \text{Ke}_P(f) & \xhookrightarrow{\iota} & \text{Ke}(f) \\
 & \searrow \pi & \nearrow h' & & \\
 & & P^*/\text{Ke}_P(\mu_f) & &
 \end{array}$$

Behauptung: Für $P_f := P^*/\text{Ke}_P(\mu_f)$ gilt:

$h: P_f \longrightarrow M$ mit $h(p') = h'(p')$ für alle
 $p' \in P_f$ ist ein Kern von f in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$.

Beweis: a) P_f ist ein Modul aus $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$, da gerade wegen der Konstruktion von $\text{Ke}_P(\mu_f)$ ein P^{**} existiert mit der in $\mathcal{M}_R$ exakten Folge

$$P^{**} \longrightarrow P^* \longrightarrow P_f \longrightarrow 0.$$

b) h ist ein Monomorphismus in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$, d.h. für $N \in \underline{P}(\mathcal{M}_R)$ und $g: N \longrightarrow P_f$ mit $hg = 0$ gilt $g = 0$, da $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ eine additive Kategorie ist:

Wegen $N \in \underline{P}(\mathcal{M}_R)$ existiert ein Epimorphismus $\nu: \bigoplus P \longrightarrow N$. Weiterhin gibt es wegen der Projektivität von $\bigoplus P$ ein $k \in \text{Hom}(\bigoplus P, P^*)$ mit $\mu_f k = h' g \nu = 0$, also

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigoplus P & \xrightarrow{\nu} & N & \xrightarrow{g} & P_f & \xrightarrow{h'} & \text{Ke}_P(f) \hookrightarrow M \\
 & & & & \uparrow \pi & \nearrow \mu_f & \\
 & & & & P^* & &
 \end{array}$$

$\searrow k$

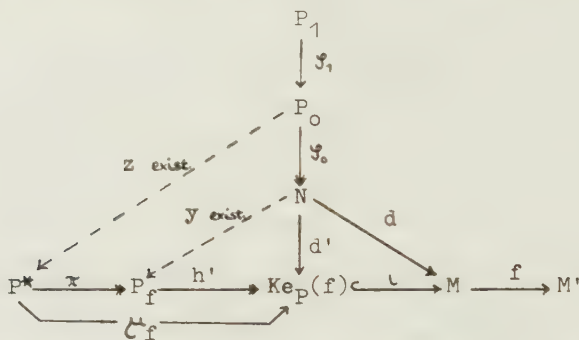
$\text{Bi}(k) \hookrightarrow \text{Ke}(\mu_f)$. Nach der Definition von $\text{Ke}_P(\mu_f)$ gilt sogar $\text{Bi}(k) \hookrightarrow \text{Ke}_P(\mu_f)$, woraus sofort $\pi k = 0 = g\nu$ folgt. Da ν Epimorphismus ist, erhalten wir $g = 0$.

c) Wir müssen nun noch zeigen: Für jedes $N \in \underline{P}(\mathcal{M}_R)$ ist

$$\text{Hom}_R(N, P_f) \longrightarrow \text{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(N, M')$$

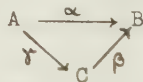
exakt. Dazu sei $d: N \longrightarrow M$ mit $f \cdot d = 0$ gegeben, d.h. $\text{Bi}(d) \hookrightarrow \text{Ke}(f)$. Wegen $N \in \underline{P}(\mathcal{M}_R)$ ist $\text{Bi}(d) \hookrightarrow \text{Ke}_P(f)$,

und es existieren $P_0, P_1 \in \underline{P}$ mit einer exakten $\underline{P}$ -Präsentierung $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$. Da π und h' Epimorphismen sind und P_0 projektiv ist, existiert ein $z \in \text{Hom}(P_0, P^*)$ mit $h'\pi z = d'y_0$, wenn $d' \in \text{Hom}(N, \text{Ke}_P(f))$ mit $d'(n) = d(n)$ für $n \in N$ ist. Definiere nun



$\mathcal{Y}(\mathcal{Y}_0(p_0)) := \pi z(p_0)$ mit $p_0 \in P_0$. y ist wohldefiniert; denn sei $\mathcal{Y}_0(p_0) = \mathcal{Y}_0(p'_0)$, also $(p_0 - p'_0) \in \text{Ke}(\mathcal{Y}_0)$, so folgt wegen $\text{Ke}(\mathcal{Y}_0) = \text{Ke}_P(\mathcal{Y}_0)$ gemäß nachfolgendem Lemma (1): $z(p_0 - p'_0) \in \text{Ke}_P(\zeta_f)$. Folglich erhalten wir die gewünschte Faktorisierung $d = \iota h' y = hy$, da $\mathcal{Y}_0$ ein Epimorphismus ist.

LEMMA 2.3: (1) Ist



ein kommutatives

Diagramm in $\mathcal{M}_R$, so gilt:

$$\alpha(\text{Ke}_P(\gamma)) \hookrightarrow \text{Ke}_P(\beta).$$

$$(2) \text{Ke}(\alpha) \hookrightarrow \text{Ke}(\gamma) \implies \text{Ke}_P(\alpha) \hookrightarrow \text{Ke}_P(\gamma).$$

Beweis:

(1) Im obigen kommutativen Diagramm gilt

$$\alpha(\text{Ke}_P(\gamma)) \hookrightarrow \alpha(\text{Ke}(\gamma)) \hookrightarrow \text{Ke}(\beta).$$

Schränkt man das Ziel von $\hat{\alpha} = \alpha|_{\text{Ke}_P(\gamma)}$ auf $\text{Bi}(\hat{\alpha})$ ein,

so ist die Hintereinanderausführung

$$\oplus P \longrightarrow \text{Ke}_P(\gamma) \xrightarrow{\hat{\alpha}} \hat{\alpha}(\text{Ke}_P(\gamma)) = \alpha(\text{Ke}_P(\gamma))$$

ein Epimorphismus in $\text{Ke}(\beta)$, so daß man aus der Definition von $\text{Ke}_P(\beta)$ sofort die Behauptung ableitet.

(2) ist eine triviale Folgerung aus der Definition von $\text{Ke}_P(-)$.

SATZ 2.4: Sei R ein beliebiger Ring und $P \in \mathcal{M}_R$ projektiv, dann ist $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ eine abelsche Kategorie.

Beweis:

Betrachten wir für einen Homomorphismus $f: M \longrightarrow M'$ aus $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} P^*/\text{Ke}_P(\mu_f) & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{\pi} & M/\text{Ke}_P(f) \\ & & \downarrow f & & \downarrow \text{dashed} \\ M'/\text{Bi}(f) & \xleftarrow{\pi'} & M' & \xleftarrow{h'} & P^{**}/\text{Ke}_P(\mu_{\pi'}) \end{array}$$

Dabei ist $M/\text{Ke}_P(f) = \text{Kok}(\text{Ke}(f))$ und $P^{**}/\text{Ke}_P(\mu_{\pi'}) = \text{Ke}(\text{Kok}(f))$. Nach Voraussetzung können wir eine exakte Auflösung von M

$$P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \quad \text{mit} \quad P_0 = \bigoplus_{i \in I} P$$

für eine gewisse Indexmenge I finden. Infolgedessen läßt sich gemäß Lemma 2.2 P^{**} mit P_0 und $\mu_{\pi'}$ mit $f \cdot g$ identifizieren, da gilt:

$$\text{Ke}(\pi') = \text{Bi}(f) = \text{Bi}(f \cdot g) = \text{Ke}_P(\pi').$$

Betrachte jetzt das folgende Diagramm:

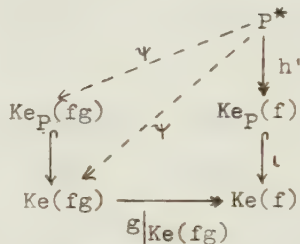
$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow \nu & & \downarrow \pi \\ P_0/\text{Ke}_P(fg) & \xrightarrow{\quad \mathbb{F} \quad} & M/\text{Ke}_P(f) \end{array}$$

Sei $\mathbb{F}: P_0/\text{Ke}_P(fg) \ni p + \text{Ke}_P(fg) \longmapsto g(p) + \text{Ke}_P(f) \in M/\text{Ke}_P(f)$,

so ist nach Lemma 2.3 (1) F wohldefiniert. Mit g ist auch F ein Epimorphismus. Es bleibt zu zeigen, daß F ein Monomorphismus ist. Wir beweisen dazu: $g(\text{Ke}_P(fg)) = \text{Ke}_P(f)$.

Da die Inklusion " $\hookrightarrow$ " gilt, war F wohldefiniert. Sei jetzt $m \in \text{Ke}_P(f)$. Betrachtet man das nebenstehende Diagramm, so erkennt man leicht, daß ein $p^* \in P^*$ existiert mit

$$\psi(p^*) \in \text{Ke}_P(fg) \quad \text{und} \\ g(\psi(p^*)) = m.$$



Für den Nachweis, daß F Monomorphismus ist, sei jetzt $g(p) \in \text{Ke}_P(f)$; dann gibt es nach der eben bewiesenen Gleichheit ein $p' \in \text{Ke}_P(fg)$ mit $g(p') = g(p)$, woraus wir sofort

$$p \in \text{Ke}(g) + \text{Ke}_P(fg) = \text{Ke}_P(fg)$$

schließen können, da

$$\text{Ke}(g) = \text{Ke}_P(g) \hookrightarrow \text{Ke}_P(fg)$$

gemäß Lemma 2.3 (2) ist. F ist also in $\mathcal{M}_R$ und damit auch in $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ ein Isomorphismus, weil $\mathcal{M}_R$ eine abelsche Kategorie ist.

Es bleibt hier noch die Kommutativität des ersten Diagramms zu zeigen, d.h. $f = h'F^{-1}\pi$: Seien dazu $m \in M$ und $p \in P_0$ mit $g(p) = m$, dann gilt

$$\begin{aligned} h'F^{-1}\pi(m) &= h'F^{-1}(m + \text{Ke}_P(f)) = h'(p + \text{Ke}_P(fg)) = \\ &= fg(p) = f(m). \end{aligned}$$

Damit haben wir Satz 2.4 vollständig bewiesen.

Offensichtlich enthält unsere abelsche Kategorie $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ auch beliebige Koprodukte; somit ist sie nach [12; I 8.4.2]

kovollständig. Da P projektiver Generator für $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ ist, gilt nach [11; 4.11 Satz 1 und Kor. 1]

SATZ 2.5: Sei R ein beliebiger Ring, P ein endlich erzeugter, projektiver R -Rechtsmodul und $S := \text{End}_R(P)$, dann gilt:

- (a) $\text{Hom}_R(P, -) : \underline{P}(\mathcal{M}_R) \longrightarrow \mathcal{M}_S$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.
- (b) $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ ist eine Grothendieck-Kategorie.

FOLGERUNG 2.6: Sei R ein rechtsnoetherscher Ring, P und S wie im Satz 2.5, dann ist

$\text{Hom}_R(P, -) : \underline{P}(\mathcal{M}_R) \longrightarrow \mathcal{M}_S$
eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis:

Da die Klasse der endlich erzeugten Objekte gegenüber Isomorphie abgeschlossen ist, gilt nach dem vorhergehenden Satz sofort die Äquivalenz der Kategorien $\underline{P}(\mathcal{M}_R)$ und $\mathcal{M}_S$.

Wegen $\underline{P}(\mathcal{M}_R) \subset \underline{P}(\mathcal{M}_R)$ bleibt lediglich die andere Inklusion zu zeigen:

Sei für $M \in \underline{P}(\mathcal{M}_R)$ die $\underline{P}$ -Präsentierung gegeben durch

$$P_1 \xrightarrow{g} P_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0, \text{ so existiert ein endlich erzeugter direkter Summand } P'_0 \text{ von } P_0, \text{ so daß}$$

$$P_1 \xrightarrow{\pi g} P'_0 \xrightarrow{f'} M \longrightarrow 0$$

exakt ist, wenn π die Projektion von P_0 auf P'_0 und $f'\pi = f$ ist. Da $P'_0 \in \underline{P}$ und $\text{Ke}(f')$ endlich erzeugt ist, erhalten wir nach analogem Schluß die Behauptung.

Diese Folgerung wird später in Lemma 2.9 verwendet werden.

Nun wollen wir uns mit selbstdualen Ringen R befassen, d.h. mit Ringen R , die morita-dual zu sich selbst sind. Bekanntlich gibt es dann einen R - R -Bimodul ${}_R U_R$, so daß U auf beiden Seiten ein injektiver Kogenerator ist mit $\text{End}_R({}_R U_R) = R$. Ist R zusätzlich links- oder rechtsperfekt, so ist nach einem Satz von Osofsky R rechts- und linksartinsch. In diesem Fall kann für U ein endlich erzeugter R - R -Bimodul gewählt werden. Für selbstduale artinsche Ringe R haben wir dann eine Dualität D zwischen der Kategorie $\mathcal{W}_R$ der endlich erzeugten R -Rechtsmoduln und der Kategorie ${}_R \mathcal{W}$ der endlich erzeugten R -Linksmoduln, und diese Dualität D ist natürlich äquivalent zum Funktor $\text{Hom}_R(-, {}_R U_R)$.

Auslander behandelte in [1] eine Unterkategorie der selbstdualen artinschen Ringe, nämlich artinsche Algebren. Eine artinsche Algebra A ist ein rechtsartinscher Ring, der als Modul über seinem Zentrum $Z = Z(A)$ endlich erzeugt ist. Nach dem Satz von Eisenbud ist Z ein artinscher Ring. Da ${}_Z A$ artinsch ist und jeder A -Linksmodul auf natürliche Weise ein Z -Modul ist, muß A auch linksartinsch sein.

LEMMA 2.7: Jede artinsche Algebra A ist ein selbstdualer artinscher Ring.

Beweis:

Sei A eine artinsche Algebra mit dem Zentrum Z . Betrachte nun das Radikal W des kommutativen artinschen Ringes Z und die zugehörige injektive Hülle $E := E(Z/W)$, dann ist nach [13; Theorem 5.20] der Funktor

$$\text{Hom}_Z(-, E) : \mathcal{W}_Z \longrightarrow \mathcal{W}_Z$$

eine Dualität, da Z eine endliche direkte Summe von artinschen, lokalen, kommutativen Ringen ist. Mit dieser Dualität kann man sofort eine Dualität

$$\text{Hom}_Z(-, E) : \mathcal{W}_A \ni M_A \longmapsto {}_A \text{Hom}_Z({}_Z M_A, {}_Z E) \in {}_A \mathcal{W}$$

ableiten. Nach dem bekannten Satz von Morita ist dann ${}_A \text{Hom}_Z({}_Z A, {}_Z E)_A$ der gesuchte injektive Kogenerator.

Offenbar gibt es aber auch selbstduale artinsche Ringe, die nicht endlich erzeugt über ihrem Zentrum sind; denn jeder Schiefkörper oder allgemeiner jeder QF-Ring ist selbstdual.

LEMMA 2.8: Sei R ein rechtsnoetherscher selbstdualer Ring mit endlich erzeugtem, injektivem Kogenerator U_R , dann gilt:

- (1) Jeder endlich erzeugte R -Modul besitzt eine endlich erzeugte injektive Hülle.
- (2) R ist beidseitig artinsch.

Beweis: (1) Für rechtsnoethersche selbstduale Ringe R , dessen zugehöriger injektiver Kogenerator U_R endlich erzeugt ist, gibt es die Dualität $\text{Hom}_R(-, {}_R U_R)$ zwischen $\mathcal{W}_R$ und ${}_R \mathcal{W}$. Da Morita-duale Ringe stets semi-perfekt sein müssen, gibt es zu jedem $M \in {}_R \mathcal{W}$ eine projektive Hülle in ${}_R \mathcal{W}$. Also besitzt auch jeder Modul $M \in \mathcal{W}_R$ eine injektive Hülle in $\mathcal{W}_R$. Aus Symmetriegründen gilt alles auch für die andere Seite.

(2) ist eine unmittelbare Folge aus (1) und dem Satz von Vinsonhaller, der besagt, daß ein rechtsnoetherscher Ring R mit endlich erzeugter injektiver Hülle $E({}_R R)$ bereits rechtsartinsch ist. Wegen der Selbstdualität von R ist R auch linksartinsch.

Für $Q \in \mathcal{W}_R$ sei im folgenden $\bar{Q}(\mathcal{W}_R)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{W}_R$, die aus allen Moduln $M \in \mathcal{W}_R$ besteht, so daß eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\quad} Q_1 \longrightarrow Q_2$$

mit $Q_1, Q_2 \in \bar{Q}$ existiert.

Wir greifen nun wieder die Folgerung 2.6 auf und beweisen folgendes

LEMMA 2.9: Sei R ein selbstdualer artinscher Ring und Q ein endlich erzeugter injektiver R -Rechtsmodul, so ist $\bar{Q}(\mathcal{W}_R)$ dual zur Kategorie der endlich erzeugten Linksmoduln $\text{End}_R(Q)^{\mathcal{W}}$ über dem Endomorphismenring von Q .

Beweis:

Sei $D: \mathcal{W}_R \longrightarrow R^{\mathcal{W}}$ die gegebene Dualität. Da Q_R injektiv und daher ${}_R P := D(Q_R)$ projektiv und endlich erzeugt ist, ergibt sich eine Dualität

$$D': \bar{Q}(\mathcal{W}_R) \longrightarrow \bar{P}({}_R \mathcal{W}).$$

Mit der Folgerung 2.6 erhalten wir bereits die Dualität

$$\bar{Q}(\mathcal{W}_R) \longrightarrow \text{End}_R(P)^{\mathcal{W}} = \text{End}_R(D(Q))^{\mathcal{W}}$$

Wegen $\text{End}_R(D(Q)) \cong \text{End}_R(Q)$ gilt somit die Behauptung.

Ist $\text{End}_R(Q)$ auch selbstdual, so ist $\bar{Q}(\mathcal{W}_R)$ äquivalent zur Kategorie $\mathcal{W}_{\text{End}_R(Q)}$. Für artinsche Algebren z.B. sind die Endomorphismenringe von endlich erzeugten Moduln wieder selbstdual, wie man aus folgendem Lemma ersehen kann.

LEMMA 2.10: Sei A eine artinsche Algebra mit dem Zentrum Z .

Seien M, N endlich erzeugte A -Rechtsmoduln, dann gilt:

- (a) ${}_Z \text{Hom}_A({}_Z M_A, {}_Z N_A)_Z$ ist endlich erzeugt über Z .
- (b) $S := \text{End}_A(M_A)$ ist eine artinsche Algebra.

Beweis:

(a) Sei M_A durch k Elemente erzeugt, dann induziert der kanonische Z - A -Epimorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^k Z^A \longrightarrow Z^M_A$$

einen Z -Monomorphismus

$${}_Z\text{Hom}_A({}_Z M_A, {}_Z N_A)_Z \longrightarrow {}_Z\text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^k {}_Z A_A, {}_Z N_A\right)_Z \cong \bigoplus_{i=1}^k {}_Z\text{Hom}_A(A, N)_Z$$

Da ${}_Z\text{Hom}_A({}_Z A_A, {}_Z N_A)_Z \cong {}_Z N_Z$ endlich erzeugt und Z artinsch ist, muß ${}_Z\text{Hom}_A(M, N)_Z$ isomorph zu einem endlich erzeugten Untermodul von $\bigoplus_{i=1}^k {}_Z N_Z$ sein.

(b) S ist nach (a) endlich erzeugt über Z und als Z -Modul artinsch. Da aber jeder S -Modul auch Z -Modul ist, ist S beidseitig artinsch.

Sei $Z(S)$ das Zentrum von S und 1_M die Identität auf M , so gilt wegen $1_M \cdot Z \hookrightarrow Z(S)$: Es gibt endlich viele $f_i \in S$ mit

$$S = \sum f_i Z = \sum f_i 1_M Z = \sum f_i Z(S).$$

S ist folglich eine artinsche Algebra.

Ehe wir uns den selbstdualen Ringen vom endlichen Darstellungstyp zuwenden, noch ein kleines Lemma, das einige Mal in den kommenden Sätzen eingehen wird.

LEMMA 2.11: Sei R ein beliebiger Ring, G_R Generator für

$\mathcal{M}_R$ und $S = \text{End}_R(G_R)$, so gilt:

(a) Für $\text{Hom}_R(G, M)_S = A \oplus B$ und $M' := \sum_{f \in A} B_i(f)$
und $M'' := \sum_{g \in B} B_i(g)$ gilt:

$$M = M' \oplus M'' \quad \text{und} \quad A \cong \text{Hom}_R(G, M').$$

(b) Ist $G_R \in \mathcal{M}_R$ und $P_S \in \mathcal{M}_S$ projektiv, so existiert ein $M' \in \underline{G}$ mit $P_S \cong \text{Hom}_R(G, M')$.

Beweis:

(a) Da G Generator ist, also $M = \sum_{\alpha \in \text{Hom}(G, M)} B_i(\alpha)$, gilt

$M = M' + M''$. Angenommen, es gäbe ein $0 \neq m \in M' \cap M''$, so betrachte die Inklusion $\iota: mR \hookrightarrow M$. Da G Generator ist, existiert ein $h \in \text{Hom}_R(G, mR)$ mit $0 \neq \iota \cdot h \in \text{Hom}_R(G, M)$. Wegen $mR \hookrightarrow M' \cap M''$ erhält man jetzt mit $0 \neq \iota \cdot h \in A \cap B = 0$ einen Widerspruch.

(b) Ist $P_S \in \mathcal{M}_S$ projektiv, so existiert wegen Lemma 1.1 (a) eine exakte zerfallende Folge

$$\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i \in I} G) \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

so daß P S -isomorph zu einem direkten Summanden von $\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i \in I} G)$ ist. Nach (a) gibt es daher ein $M' \in \underline{G}$ mit $P_S \cong \text{Hom}_R(G, M')$.

Wir werden jetzt Ringe vom endlichen Darstellungstyp studieren, d.h. Ringe R , die rechtsartinsch sind und nur eine endliche Anzahl nicht-isomorpher, unzerlegbarer, endlich erzeugter R -Rechtsmoduln besitzen (die direkte Summe all dieser Moduln sei im folgenden mit G_R bezeichnet). Eisenbud und Griffith haben in [7] gezeigt, daß diese Eigenschaften auch für die linke Seite gelten. In diesem Paragraphen ist es unser Ziel zu zeigen, daß das Problem, selbstduale Ringe vom endlichen Darstellungstyp mit selbstdualem Endomorphismenring $\text{End}_R(G_R)$ bis auf Morita-Äquivalenzklassen zu klassifizieren, genau dasselbe ist wie selbstduale artinsche Ringe S zu klassifizieren mit $\text{gl.dim } S \leq 2$, $\text{dom.dim } S \geq 2$ und selbstdualem Endomorphismenring $\text{End}_S(Q_S)$, wobei Q_S der minimal-treue Modul von S ist. Die dominante Dimension eines Moduls ist dabei folgendermaßen definiert:

Ein Modul $M \in \mathcal{M}_S$ hat die dominante Dimension (Abkürzung: $\text{dom.dim } M$) größer oder gleich $n \geq 1$:

$\Longleftarrow$ Für eine minimale injektive Auflösung von M

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots$$

gilt: I_i projektiv für $i \leq n-1$.

SATZ 2.12: Sei R ein selbstdualer Ring vom endlichen Darstellungstyp und $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine vollständige Menge nicht-isomorpher, unzerlegbarer, endlich erzeugter R -Rechtsmoduln und sei der Endomorphismenring des Generators $G := \bigoplus_{i=1}^n M_i$ von $\mathcal{M}_R$ wieder selbstdual, so gilt:

- (a) $S := \text{End}_R(G_R)$ ist ein selbstdualer artinscher Ring.
- (b) $\text{r.gl.dim } S = 1.\text{gl.dim } S \leq 2$.
- (c) $\text{dom.dim } S \geq 2$.
- (d) Ist Q der minimal treue S -Rechtsmodul, so ist $\text{End}_S(Q)$ morita-äquivalent zu R .

S ist ein artinscher Ring; denn der Endomorphismenring eines Moduls endlicher Länge ist semi-primär, und folglich ist der selbstduale Ring S rechts- und linksartinsch (siehe Seite 24).

Wir wollen nun die restlichen Punkte dieses Satzes, der den ersten Teil des späteren Hauptsatzes 2.16 bildet, mit Hilfe mehrerer Lemmata beweisen. Zunächst sehen wir, daß die beiden artinschen Ringe R und S entweder beide halbeinfach sind oder daß für eine beliebige globale Dimension von R die globale Dimension von S nur 2 sein kann.

LEMMA 2.13: Sei R ein Ring vom endlichen Darstellungstyp, G wie in 2.12 gegeben und sei $S = \text{End}_R(G_R)$ rechtsartinsch, so gilt:

- (a) $\text{r.gl.dim } S \leq 2$
- (b) $\text{r.gl.dim } S \leq 1 \iff \text{gl.dim } R = 0 \iff \text{gl.dim } S = 0$.

Beweis:

(a) Sei M ein zyklischer S -Rechtsmodul, so läßt sich wie beim Beweis zum Hauptsatz 1.4 (c) auf natürliche Weise eine S -projektive Auflösung

$$\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i=1}^k G)_S \xrightarrow{f_1} \text{Hom}_R(G, G)_S \xrightarrow{f_0} M_S \longrightarrow 0$$

konstruieren und ein R -Homomorphismus $t: \bigoplus_{i=1}^k G \longrightarrow G$

finden mit $\text{Hom}_R(G, t) = f_1$. Da $\text{Hom}_R(G, -)$ linksexakt ist, ergibt sich mit der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Ke}(t) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k G \longrightarrow G$$

die S -exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(G, \text{Ke}(t)) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i=1}^k G) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, G) \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Da R artinsch und $\bigoplus_{i=1}^k G$ endlich erzeugt ist, so auch $\text{Ke}(t)$.

Nach Voraussetzung ist $\text{Ke}(t)$ damit isomorph zu einem direkten Summanden einer endlichen direkten Summe der G . Also ist gemäß Lemma 1.1 (b) auch $\text{Hom}_R(G, \text{Ke}(t))$ S -projektiv, und wir haben für jeden zyklischen S -Rechtsmodul eine projektive Auflösung der Länge 2 konstruiert.

(b) Zu zeigen ist nur: $\text{r.gl.dim } S \leq 1 \xrightarrow{1.} \text{r.gl.dim } R = 0$
 $\xrightarrow{2.} \text{r.gl.dim } S = 0 .$

$\xrightarrow{1.}$: Betrachte die R -exakte Folge

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$$

mit $I \hookrightarrow R$. Wir erhalten daraus wegen der endlichen Erzeugbarkeit von I, R und R/I und der Linksexaktheit von $\text{Hom}_R(G, -)$ die S -exakte projektive Auflösung eines bestimmten S -Rechtsmoduls:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, R/I) \xrightarrow{f} \text{Kok}(\text{Hom}_R(G, \pi)) \longrightarrow 0$$

Da nach Voraussetzung $\text{r.gl.dim } S \leq 1$ ist, muß

$\text{Ke}(f) = \text{Bi}(\text{Hom}_R(G, \pi))$ S -projektiv sein. Daher zerfällt die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, R) \longrightarrow \text{Bi}(\text{Hom}_R(G, \pi)) \longrightarrow 0 .$$

Da G Generator ist, erhalten wir gemäß Lemma 2.11 (a) das gewünschte Resultat: I ist direkter Summand von R , also ist R halbeinfach.

$\xrightarrow{2.}$: Sei R halbeinfach, dann ist G_R ein projektiver, endlich erzeugter Generator, also ein Progenerator für $\mathcal{M}_R$. Damit sind R und $\text{End}_R(G_R) = S$ Morita-äquivalent, also auch S halbeinfach.

Lemma 2.13 ist damit bewiesen, ebenso Satz 2.12 (a) und (b).

- LEMMA 2.14: (a) Seien R und G wie in 2.12 und sei
 $S := \text{End}_R(G)$, dann ist für jeden projektiven,
endlich erzeugten S-Rechtsmodul P
 $\text{dom.dim } P \geq 2$.
- (b) Für einen rechtsartinschen Ring S gilt:
 $\text{dom.dim } S \geq 2 \iff \text{dom.dim } P \geq 2$ für jedes projektive
 $P \in \mathcal{W}_S$.

Beweis:

(a) Zu jedem projektiven Modul $P \in \mathcal{W}_S$ existiert analog zu Lemma 2.11 (b) ein $C \in \underline{G}$ mit $P_S \cong \text{Hom}_R(G, C)_S$. Sei nun

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1$$

eine minimale injektive Auflösung, wobei ohne Einschränkung

$$f_1: I_0 \xrightarrow{\pi} \text{Kok}(f_0) \xrightarrow{j} E(\text{Kok}(f_0)) = I_1$$

ist. I_0 und damit auch I_1 sind nach Lemma 2.8 (1) endlich erzeugt, also $I_0, I_1 \in \underline{G}$. Wegen der Linksexaktheit von $\text{Hom}_R(G, -)$ erhalten wir die exakte Folge

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I_0) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I_1),$$

wobei die $\text{Hom}_R(G, I_i)$ für $i=0,1$ nach 1.1 (b) S-projektiv sind und zugleich S-injektiv, da für einen Generator G der Funktor $\text{Hom}_R(G, -)_S$ injektive Moduln und injektive Hüllen erhält (und sie sogar reflektiert). Damit ist $\text{Hom}_R(G, I_0)$ schon die S-injektive Hülle von $\text{Hom}_R(G, C) \cong P$. Betrachtet man das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_R(G, I_0) & \longrightarrow & \text{Bi}(\text{Hom}_R(G, \pi)) & \hookrightarrow & \text{Hom}_R(G, \text{Kok}(f_0)) & \xrightarrow{\text{Hom}(G, j)} & \text{Hom}_R(G, I_1) \\ & \searrow & \parallel & & & \nearrow \exists \alpha & \\ & & \text{Kok}(\text{Hom}_R(G, f_0)) =: J & \longrightarrow & E(J) & & \end{array}$$

wobei $E(J)$ die injektive Hülle von J ist, so sieht man, daß

es einen Monomorphismus $\alpha: E(J) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_1)$ gibt und $\alpha(E(J))$ S-direkter Summand von $\text{Hom}_R(G, I_1)$ ist. $E(J)$ ist somit S-projektiv und S-injektiv, womit die Behauptung $\text{dom.dim } P \geq 2$ gezeigt ist.

Bemerkung zu (a):

Im letzten Beweis gilt sogar

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(G, C)_S \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I_0)_S \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I_1)_S$$

ist eine minimale injektive Kopräsentierung von P. Es gibt nach 2.11 (a) einen R-direkten Summanden I'_1 von I_1 mit $E(J) \cong \text{Hom}_R(G, I'_1) \in \mathcal{M}_S$. Wendet man den zu $\text{Hom}_R(G, -)$ linksadjungierten Funktor $(- \otimes_S G)$, der nach dem Satz von Gabriel-Popescu exakt ist, auf die exakten Zeilen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(G, C)_S \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I_0)_S \begin{matrix} \nearrow \text{Hom}_R(G, I_1)_S \\ \searrow \text{Hom}_R(G, I'_1)_S \end{matrix}$$

an, so ersieht man die obige Behauptung, wenn man berücksichtigt, daß es einen funktoriellen Isomorphismus

$$\phi: \text{Hom}_R(G, -) \otimes_S G \longrightarrow 1_{\mathcal{M}_R} \quad \text{gibt.}$$

(b) " $\Leftarrow$ ": klar.

" $\Rightarrow$ ": Sei $E = E(S)$ die injektive Hülle von S und

$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} E \longrightarrow E(\text{Kok}(f))$ eine minimale injektive Auflösung, wobei E und $E(\text{Kok}(f))$ auch S-projektiv sind. Ist $S = \bigoplus_{i=1}^1 S_i$ eine Zerlegung von S in direkt unzerlegbare Ideale, so gilt bekanntlich das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{\pi f} & \text{Kok}(f) & \xrightarrow{f'} & E(\text{Kok}(f)) \\ & & \downarrow \psi & \nearrow \pi_f \psi^{-1} & \cong & & \cong \\ \bigoplus_{i=1}^1 S_i & \xrightarrow{\oplus f_i} & \bigoplus_{i=1}^1 E(S_i) & \longrightarrow & \text{Kok}(\bigoplus_{i=1}^1 f_i) & \cong & \bigoplus_{i=1}^1 \text{Kok}(f_i) \\ & & \searrow \oplus \pi_i & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \bigoplus_{i=1}^1 \text{Kok}(f_i) & \xrightarrow{\oplus f'_i} & \bigoplus_{i=1}^1 E(\text{Kok}(f_i)) \end{array}$$

da $\text{Ke}(\pi_f \psi^{-1}) = \text{Bi}(\psi f) = \text{Bi}(\bigoplus_{i=1}^1 f_i)$ ist. Daraus erkennt man sofort, daß für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$

$$0 \longrightarrow S_i \xrightarrow{f_i} E(S_i) \xrightarrow{f_i' \pi_i} E(\text{Kok}(f_i))$$

eine minimale injektive Auflösung für S_i ist mit den beiden projektiven Moduln E_i und $E(\text{Kok}(f_i))$. Da jeder projektive Modul über einem rechtsartinschen Ring isomorph zu einer direkten Summe dieser S_i ist, haben wir die Behauptung gezeigt.

Nun fehlt uns vom Beweis des Satzes 2.12 nur noch Punkt (d), dem wir uns jetzt zuwenden. Wohlbekannt ist, daß für einen rechtsartinschen Ring S mit $\text{dom.dim } S \geq 1$ der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte, minimal treue S -Rechtsmodul Q gleich der endlichen direkten Summe einer vollständigen Menge nicht-isomorpher, unzerlegbarer, projektiver und zugleich injektiver S -Rechtsmoduln Q_i ist. Dies gilt insbesondere für unseren selbstdualen artinschen Ring $S = \text{End}_R(G)$ mit $\text{dom.dim } S \geq 2$. Sei weiterhin $\{I_1, \dots, I_t\}$ eine vollständige Menge nicht-isomorpher, unzerlegbarer, injektiver R -Rechtsmoduln, so sind die S -Rechtsmoduln

$$\text{Hom}_R(G, I_1)_S, \dots, \text{Hom}_R(G, I_t)_S$$

gemäß 2.11 (a) und 2.11 (b) gerade alle nicht-isomorphen, unzerlegbaren, projektiven und zugleich injektiven $Q_1, \dots, Q_m$, also $t = m$, da G Generator und damit der Funktor $\text{Hom}_R(G, -)$ volltreu ist. Also gilt:

$$\begin{aligned} \text{End}_S(Q) &\cong \text{End}_S\left(\bigoplus_{i=1}^m \text{Hom}_R(G, I_i)\right) \cong \text{End}_S(\text{Hom}_R(G, \bigoplus_{i=1}^m I_i)) \\ &\cong \text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^m I_i\right). \end{aligned}$$

Sei jetzt $D: \mathcal{M}_R \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ die gegebene "Rechts-Links-Dualität" zwischen den endlich erzeugten R -Moduln, so gilt

$$\text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^m I_i\right) \cong \text{End}_R\left(D\left(\bigoplus_{i=1}^m I_i\right)\right) \cong \text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^m D(I_i)\right).$$

$\{I_1, \dots, I_m\}$ ist eine vollständige Menge nicht-isomorpher,

unzerlegbarer injektiver R -Rechtsmoduln und damit ist $\{D(I_1), \dots, D(I_m)\}$ eine vollständige Menge nicht-isomorpher unzerlegbarer projektiver R -Linksmoduln. Wegen

$R \in \bigoplus_{i=1}^m D(I_i)$ ist $R(\bigoplus_{i=1}^m D(I_i))$ ein Progenerator. Mit

[11; Satz 2 aus 4.11] sieht man leicht, daß

$\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^m D(I_i))$ und somit $\text{End}_S(Q_S)$ morita-äquiva-

lent zu R ist. Damit ist Satz 2.12 vollständig bewiesen.

Wir wollen uns nun mit der Umkehrung des Satzes befassen.

SATZ 2.15: Sei S ein selbstdualer artinscher Ring mit
 $\text{gl.dim } S \leq 2$ und $\text{dom.dim } S \geq 2$. Sei Q der
minimal treue S -Rechtsmodul und $R := \text{End}_S(Q_S)$
wieder selbstdual, dann gilt:

R ist ein artinscher Ring vom endlichen Dar-
stellungstyp mit den Eigenschaften:

- (a) $\mathcal{W}_R$ ist äquivalent zur Kategorie $\mathcal{P}_S$ aller
endlich erzeugten projektiven S -Rechtsmoduln.
- (b) Ist $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine vollständige Menge nicht-
isomorpher unzerlegbarer, endlich erzeugter
 R -Rechtsmoduln, so ist

$\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^n M_i)$ morita-äquivalent zu S .

Beweis:

(a) Da der minimal treue S -Rechtsmodul Q endlich erzeugt und injektiv ist, ergibt sich aus Lemma 2.9 und einer dort anschließenden Bemerkung die Äquivalenz zwischen

$$\bar{Q}(\mathcal{W}_S) \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_{\text{End}_S(Q)} = \mathcal{W}_R$$

$\bar{Q}(\mathcal{W}_S)$ ist dabei die volle Unterkategorie von $\mathcal{W}_S$, die

aus allen endlich erzeugten S -Rechtsmoduln C besteht, so daß eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{f} Q_1 \quad \text{mit} \quad Q_i \in \underline{Q}$$

existiert. Mit $\underline{Q}$ sind auch die Q_i S -projektiv. Da

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \text{Kok}(f) \longrightarrow 0$$

exakt ist, ergibt sich wegen $\text{gl.dim } S \leq 2$:

$\text{Ke}(f) \cong C$ ist S -projektiv, also $\bar{\bar{Q}}(\mathcal{W}_S) \subset \mathcal{P}_S$.

Andererseits gibt es wegen $\text{dom.dim } S \geq 2$ gemäß 2.14 (b) für jedes $P \in \mathcal{P}_S$ eine Kopräsentierung

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \quad \text{mit} \quad I_i \in \underline{Q},$$

da die I_i endlich erzeugt, projektiv und injektiv sind, also $\bar{\bar{Q}}(\mathcal{W}_S) = \mathcal{P}_S$. Da aber $\mathcal{P}_S$ eine Kategorie vom endlichen Darstellungstyp ist, haben wir die Äquivalenz der Kategorien $\mathcal{W}_R$ und $\mathcal{P}_S$ gezeigt.

(b) Sei $\{M_1, \dots, M_n\}$ eine vollständige Menge nicht-isomorpher unzerlegbarer, endlich erzeugter R -Rechtsmoduln und seien $P_1, \dots, P_n$ die endlich erzeugten projektiven S -Rechtsmoduln, die unter der Äquivalenz

$$\psi : \mathcal{P}_S \longrightarrow \mathcal{W}_R$$

korrespondieren, so ist $\{P_1, \dots, P_n\}$ eine vollständige Menge nicht-isomorpher unzerlegbarer projektiver S -Rechtsmoduln, also

$$\bigoplus_{i=1}^n P_i \quad \text{ein Progenerator für } \mathcal{M}_S.$$

Daher ist

$$\text{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \text{End}_R(\psi\left(\bigoplus_{i=1}^n P_i\right)) \cong \text{End}_S\left(\bigoplus_{i=1}^n P_i\right)$$

morita-äquivalent zu S .

Aus den Sätzen 2.12 und 2.15 ergibt sich schließlich der angekündigte Hauptsatz:

HAUPTSATZ 2.16:

Seien die Moduln G_R wie in 2.12 und Q_S wie in 2.15,
dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen

- (1) den Morita-Äquivalenzklassen $[R]$ von selbstdualen Ringen R vom endlichen Darstellungstyp mit selbstdualem Endomorphismenring $\text{End}_R(G_R)$ und
- (2) den Morita-Äquivalenzklassen $[S]$ von selbstdualen artinschen Ringen S mit $\text{gl.dim } S \leq 2$ und $\text{dom.dim } S \geq 2$, sowie mit selbstdualem Endomorphismenring $\text{End}_S(Q_S)$

derart, daß ein Ring $R \in [R]$ mit dem Endomorphismenring S der direkten Summe G_R aller nicht-isomorphen, unzerlegbaren, endlich erzeugten R -Rechtsmoduln korrespondiert und ein Ring $S \in [S]$ mit dem Endomorphismenring R des minimal-treuen S -Rechtsmoduls Q_S .

Mit Hilfe der Lemmata 2.7 und 2.10 (b) folgt nun unmittelbar das Auslandersche Resultat über artinsche Algebren:

FOLGERUNG 2.17:

Es existiert eine bijektive Zuordnung zwischen

- (1) den Morita-Äquivalenzklassen $[R]$ von artinschen Algebren vom endlichen Darstellungstyp und
- (2) den Morita-Äquivalenzklassen $[S]$ von artinschen Algebren S mit $\text{gl.dim } S \leq 2$ und $\text{dom.dim } S \geq 2$.

§ 3 KONSTRUKTION RECHTSARTINSCHER RINGE

VOM UNENDLICHEN DARSTELLUNGSTYP

Dieser Abschnitt ist im Zusammenhang mit Ringen vom endlichen Darstellungstyp, die wir eben behandelt haben, von Interesse. Wir beschäftigen uns hier mit einem Verfahren, aus beliebigen rechtsartinschen Ringen Matrizenringe vom unendlichen Typ zu konstruieren, d.h. Ringe R , die unendlich viele, nicht-isomorphe, unzerlegbare R -Rechtsmoduln besitzen. Ausgangspunkt war folgendes Problem, das Auslander am Ende von [1] aufwarf: Ist S eine artinsche Algebra vom endlichen Darstellungstyp und $T_2(S)$ der Ring der unteren 2×2 Dreiecksmatrizen über S , so fragt Auslander, ob bei genügend häufiger Anwendung des Prozesses $T_2(-)$ schließlich $T_2(T_2(\dots(T_2(S))\dots))$ nicht mehr vom endlichen Typ ist und ob es in diesem Fall bereits eine feste Iterationsanzahl n gibt, nach der für alle artinschen Algebren S der Ring $T_2^n(S) := T_2(\dots(T_2(S))\dots)$ nicht mehr vom endlichen Darstellungstyp ist. Ich bejahe diese Frage sogar für alle rechtsartinschen Ringe R mit den Iterationsanzahlen $n \geq 3$: Bereits $T_2(T_2(T_2(R)))$ besitzt unendlich viele, nicht-isomorphe unzerlegbare Rechtsmoduln. Da $T_2(T_2(K))$ für einen Schiefkörper K noch vom endlichen Typ ist, erhalten wir mit $n=3$ die kleinstmögliche Zahl, die das obige Problem löst.

Sei R ein semiperfekter Ring und sei $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ eine Zerlegung der 1 in orthogonale lokale Idempotente e_i . Wählt man aus $\{e_1 R, \dots, e_n R\}$ eine vollständige Menge nicht-isomor-

pher Ideale aus, ohne Einschränkung etwa $e_1 R, \dots, e_m R$, $m \leq n$, dann ist mit $e := \sum_{i=1}^m e_i$ eR ein Progenerator für $\mathcal{M}_R$ und somit $eRe \cong \text{Hom}_R(eR, eR)$ morita-äquivalent zu R . eRe heißt dann Basisring von R .

LEMMA 3.1: Ist R ein semi-perfekter Ring und ist eRe der zugehörige Basisring, so sind auch $T_2(R)$ und $T_2(eRe)$ morita-äquivalent.

Beweis:

Offensichtlich gelten für Idempotente $e_i, e_j \in R$ folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned} e_i R \cong e_j R &\iff \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_2(R) \cong \begin{pmatrix} e_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_2(R) \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_i \end{pmatrix} \cdot T_2(R) \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_j \end{pmatrix} \cdot T_2(R). \end{aligned}$$

Außerdem ist $\begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_2(R) \not\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_j \end{pmatrix} \cdot T_2(R)$. Für

$e' := \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ ist damit $e' \cdot T_2(R)$ ein Progenerator für $\mathcal{M}_{T_2(R)}$, und $\text{End}_{T_2(R)}(e' \cdot T_2(R)) \cong e' \cdot T_2(R) \cdot e' = T_2(eRe)$ ist morita-äquivalent zu $T_2(R)$.

Im folgenden Lemma zeige ich, daß die Eigenschaft eines Ringes S , nicht vom endlichen Typ zu sein, erhalten bleibt, falls man zu einem Ring übergeht, der surjektiv und ringhomomorph auf den ursprünglichen Ring S abgebildet werden kann. Dieses Ergebnis wende ich später auf folgenden Homomorphismus an: Sei R ein rechtsartinscher Ring, eRe sein Basisring, dann ist die Hintereinanderausführung

$$\eta: eRe \longrightarrow eRe/eNe \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m (e_i Re_i / e_i Ne_i) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow e_1 R e_1 / e_1 N e_1$$

mit $N = Ra(R)$ nach [5; 54.6 und 54.8] ein surjektiver Ringhomomorphismus in einen Schiefkörper.

LEMMA 3.2: Seien R und S Ringe und $g: R \longrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, dann gilt:

S vom unendlichen Darstellungstyp

$\implies R$ vom unendlichen Darstellungstyp.

Beweis:

Für einen S -Rechtsmodul M_S erhält man bekanntlich durch die Definition $m \cdot r = m \cdot g(r)$ für $m \in M$, $r \in R$ einen R -Rechtsmodul M_R . Offenbar ist M endlich erzeugt über R , falls M es auch über S ist. Da g surjektiver Ringhomomorphismus ist, ist jeder R -Homomorphismus ein S -Homomorphismus und umgekehrt. Man sieht nun sofort ein, daß, falls $\{M_i\}_{i \in I}$ eine unendliche Menge nicht-isomorpher, unzerlegbarer, endlich erzeugter S -Rechtsmoduln ist, $\{M_i\}_{i \in I}$ alle diese Eigenschaften auch als Menge von R -Rechtsmoduln beibehält.

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt offensichtlich nicht, da wir für alle Primzahlen p mit den Homomorphismen

$g_p: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Gegenbeispiele haben. Aber mit dem surjektiven Ringhomomorphismus

$$T_2(R) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \longmapsto a \in R$$

folgt unmittelbar, daß man durch die Anwendung von $T_2(-)$ auf einen Ring vom unendlichen Typ wieder einen Ring vom unendlichen Typ erhält.

Für einen beliebigen Schiefkörper will ich jetzt den entscheidenden Satz beweisen, aus dem mein angekündigtes Ergebnis dann rasch folgt:

SATZ 3.3: Sei K ein Schiefkörper, dann ist

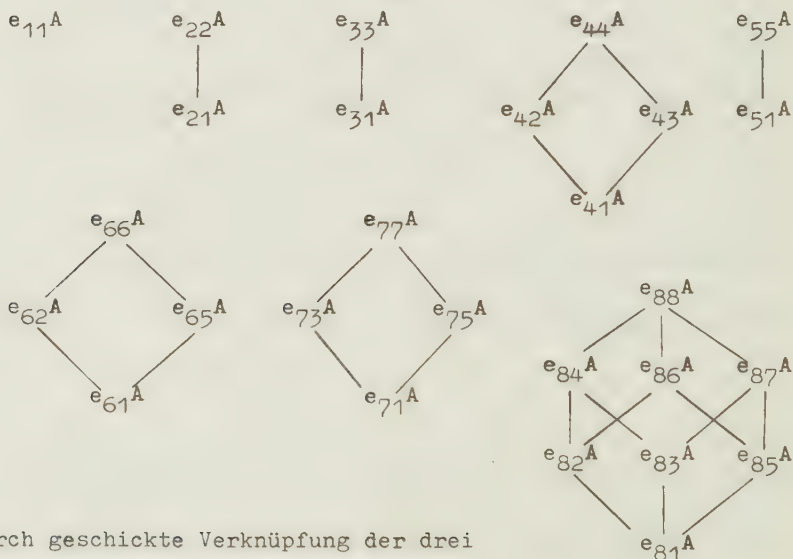
$T_2(T_2(T_2(K)))$ ein artinscher Ring vom unendlichen Darstellungstyp, und jede weitere Anwendung von $T_2(-)$ führt wieder auf einen Ring, der nicht vom endlichen Typ ist.

Beweis:

Seien im folgenden e_{ij} die 8×8 - Einheitsmatrizen, die nur im Schnittpunkt der i -ten Zeile mit der j -ten Spalte eine 1 und sonst nur 0 haben. Sei

$$A := T_2(T_2(T_2(K))),$$

so ergeben sich für die 8 direkt unzerlegbaren direkten Summanden folgende Idealverbände:



Durch geschickte Verknüpfung der drei Ideale $e_{44}A$, $e_{66}A$ und $e_{77}A$, die jeweils ähnliche Strukturen aufweisen, wollen wir uns einen unzerlegbaren A -Rechtsmodul definieren, mit Hilfe dessen man nach Theorem 3.1 in [6] unzerlegbare

Moduln beliebig großer Kompositionslänge konstruieren kann. Sei $N = \text{Ra}(A)$, so betrachten wir die A -Rechtsmoduln

$$M' : = e_{44}N^2 + e_{66}N^2 + e_{77}N^2 + (e_{42} - e_{62})A + \\ + (e_{43} - e_{73})A \quad \text{und}$$

$$M : = (e_{44} + e_{66} + e_{77}) \cdot A / M'.$$

Für den Beweis der Unzerlegbarkeit von M ist es hinreichend zu zeigen, daß $\text{End}_A(M_A)$ lokal ist. Dies ist sicher der Fall, wenn für jedes $f \in \text{End}_A(M_A)$ gilt: f nilpotent oder f Isomorphismus. Sei nun $f \in \text{End}_A(M_A)$ beliebig gegeben, und seien

$$m_1 : = e_{77} + M', \quad m_2 : = e_{44} + M' \quad \text{und} \quad m_3 : = e_{66} + M',$$

so wird f beschrieben durch

$$f: m_i \longmapsto m_1 a_{i1} + m_2 a_{i2} + m_3 a_{i3} \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

mit $a_{ij} \in A$. Durch Multiplizieren mit e_{kk} ergibt sich, daß das Bild eines m_i unter dem Homomorphismus f bereits eindeutig dargestellt werden kann als $m_i \alpha_{ii}$ mit $\alpha_{ii} \in K$,

also $f: m_i \longmapsto m_i \alpha_{ii}$. Da aber nach Wahl von M

$\overline{e_{42}}$ mit $\overline{e_{62}}$ und $\overline{e_{43}}$ mit $\overline{e_{73}}$ identifiziert werden können gilt:

$$m_1 e_{73} = m_2 e_{43} \quad \text{und} \quad m_2 e_{42} = m_3 e_{62}.$$

Dies impliziert sofort $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$. Also ist f eindeutig durch die Angabe

$$f: m_i \longmapsto m_i \cdot k \quad \text{für } k = \alpha_{ii} \in K$$

bestimmt. Damit ist $\text{End}_A(M_A)$ isomorph zum Schiefkörper K und M_A direkt unzerlegbar. M besitzt außerdem die beiden isomorphen A -Untermodule

$$C : = (e_{65}A + M') / M' \quad \text{und} \quad C' : = (e_{75}A + M') / M',$$

da bereits $e_{65}A$ A -isomorph zu $e_{75}A$ ist. Die Vorausset-

zungen für [6; Theorem 3.1] sind erfüllt bis auf $\text{Ext}_A^1(M, C) = 0$. Diese letzte Bedingung kann aber, wie man aus diesem Satz ersehen kann, durch folgende ersetzt werden: Seien $\varepsilon_i: M \longrightarrow M = M_i$ Isomorphismen für $i = 0, \dots, n$, $M^n := M_0 \oplus \dots \oplus M_n$ und sei L der A -Untermodul von M^n , der durch die Elemente

$$\varepsilon_0 \overline{e_{65}} - \varepsilon_1 \overline{e_{75}}, \quad \varepsilon_1 \overline{e_{65}} - \varepsilon_2 \overline{e_{75}}, \quad \dots, \quad \varepsilon_{n-1} \overline{e_{65}} - \varepsilon_n \overline{e_{75}}$$

erzeugt wird, wobei M_i mit der entsprechenden Kopie in M^n identifiziert wird; dann genügt der Nachweis der Unzerlegbarkeit von M^n/L als A -Rechtsmodul:

Wegen der Faktorisierung nach L können die Elemente $\overline{e_{65}}$ und $\overline{e_{75}}$ $n-1$ mal miteinander identifiziert werden. Ist

$f: M^n/L \longrightarrow M^n/L$ ein beliebiger A -Endomorphismus, so kann dieser analog zu vorher dargestellt werden durch

$$f: \overline{\varepsilon_j m_1} \longmapsto \sum_{k=0}^n \overline{\varepsilon_k m_1} \cdot \alpha_{1+3j, i+3k},$$

wobei die $\alpha_{1m} \in K$ sind. Wegen

$$\overline{\varepsilon_j m_1} \cdot e_{73} = \overline{\varepsilon_j m_2} \cdot e_{43}, \quad \overline{\varepsilon_j m_2} \cdot e_{42} = \overline{\varepsilon_j m_3} \cdot e_{62}$$

für $j = 0, \dots, n$ und $\overline{\varepsilon_{j+1} m_1} \cdot e_{75} = \overline{\varepsilon_j m_3} \cdot e_{65}$ ($j = 0, \dots, n-1$)

erhalten wir sogleich die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{1+3j, 1+3k} &= \alpha_{2+3j, 2+3k} && \text{für } j=0, \dots, n, k=0, \dots, n \\ (*) \quad \alpha_{2+3j, 2+3k} &= \alpha_{3+3j, 3+3k} && \text{für } j=0, \dots, n, k=0, \dots, n \\ \alpha_{3j, 3k} &= \alpha_{1+3j, 1+3k} && \text{für } j=1, \dots, n, k=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich dabei, daß

$$\begin{aligned} \alpha_{1+3j, 1} &= 0 \quad \text{ist für } j=1, \dots, n \quad \text{und} \\ \alpha_{3+3j, 3n+3} &= 0 \quad \text{für } j=0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

f kann daher als eine $(3n+3) \times (3n+3)$ -Matrix (α_{ij}) aufgefaßt werden, wobei nach $(*)$ alle Elemente außerhalb der Diagonalen gleich Null und die Diagonalelemente alle gleich sind. Folglich ist auch $\text{End}_A(M^n/L)$ ein Schiefkörper, der isomorph zu K ist. Da M^n/L für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig große endliche Kompositionsängen annehmen kann, ist

$$T_2^3(K) : = T_2(T_2(T_2(K)))$$

ein Ring vom unendlichen Darstellungstyp.

Für einen rechtsartinschen Ring R war

$$\eta : eRe \longrightarrow e_1Re_1/e_1Ne_1 = K$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus, der zu einem entsprechenden Homomorphismus

$$T_2(\eta) : T_2(eRe) \longrightarrow T_2(K) \quad \text{bzw.}$$

$$T_2^3(\eta) : T_2^3(eRe) \longrightarrow T_2^3(K)$$

geliftet werden kann. Nach Satz 3.3 und Lemma 3.2 ist $T_2^3(eRe)$ ein Ring vom unendlichen Typ. Mit Lemma 3.1 ergibt sich schließlich das gewünschte Resultat:

Startet man mit einem beliebigen rechtsartinschen Ring R und wendet dreimal aufeinander $T_2(-)$ an, so ist der Ring $T_2^3(R)$ immer ein rechtsartinscher Ring vom unendlichen Darstellungstyp.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. Auslander: Representation Dimension of Artin Algebras, Queen Mary College Mathematics Notes, 1971
- [2] H. Bass: The Morita - Theorems, Lecture Notes, University of Oregon .
- [3] I. Bucur, A. Deleanu: Introduction to the Theory of Categories and Functors, London 1968 .
- [4] H. Cartan, S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton University Press 1956 .
- [5] C.W. Curtis, I. Reiner: Representation Theory of Finite Groups and Assoziative Algebras, New York - London 1962 .
- [6] S.E. Dickson: On Algebras of Finite Representation Type, Trans. Amer. Math. Soc (1969) 127 - 141 .
- [7] D. Eisenbud, P. Griffith: The Structure of Serial Rings, Pacific J. Math. 36 (1971), 109 - 121 .
- [8] J.P. Jans: Rings and Homology, New York 1964 .
- [9] S. MacLane: Homology, Berlin 1963 .
- [10] E. Matlis: Injective Modules over Noetherian Rings, Pac. J. Math. 8 (1958) 511 - 528 .
- [11] B. Pareigis: Kategorien und Funktoren, Stuttgart 1969 .
- [12] H. Schubert: Kategorien I + II, Berlin, Heidelberg, New York 1970 .
- [13] D.W. Sharpe, P. Vámos: Injective Modules, Cambridge at the University Press 1972 .
- [14] H. Tachikawa: Lectures on QF - 3 and QF - 1 - Rings, Carleton Mathematical Lecture Notes Nr. 1, July 1972 .
- [15] H. Tachikawa, C.M. Ringel: QF - 3 - Rings
- [16] R.B. Warfield: A Krull - Schmidt - Theorem for Infinite Sums of Modules, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969) 460 - 465 .

Lebenslauf des Verfassers

Ich, Hans Joachim Müller, kam am 14. September 1944 in Huttendorf, Kreis Hohenelbe / Sudetenland, als zweiter Sohn des Webereibesitzers Erich Müller und seiner Ehefrau Rotraut, geborene Fischer, zur Welt. Als ich 1 1/2 Jahre alt war, wurden meine Eltern aus der Heimat vertrieben. Sie wurden in Friedberg bei Augsburg angesiedelt. Dort besuchte ich von 1950 bis 1955 die Volksschule bis zur 5. Klasse. Im August 1955 übersiedelten wir nach Haunstetten. Einen Monat später trat ich ins Realgymnasium Augsburg ein. Diese Schule besuchte ich neun Jahre und bestand im Juli 1964 das Abitur.

Im Mai 1964 verpflichtete ich mich zu einer zweijährigen Wehrdienstzeit und wurde am 1. Oktober 1964 nach Pfullendorf einberufen. Nach der Grundausbildung diente ich bei der Raketenartillerie in Landsberg am Lech und wurde Ende September 1966 als Leutnant der Reserve entlassen.

Mein Studium der Mathematik und Physik begann ich im November 1966 an der Universität München, an der ich auch alle folgenden Semester verbrachte. Nebenbei studierte ich Geschichte und Ägyptologie und unternahm während meiner Studienzeit mehrere große Fahrten nach Nordafrika, in die zentrale Sahara und in den Nahen und Mittleren Osten. Im April 1970 wurde ich als Stipendiat in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen. In meinem 10. Semester - am 6. Juli 1971 - bestand ich die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik mit "ausgezeichnet". Anschließend arbeitete ich knapp zwei Jahre an meiner Dissertation.

Vor wenigen Wochen, am 2. August 1973, heiratete ich in Augsburg die Pharmaziestudentin Fräulein Angelika Sponheimer.

